Lukuteoriaa lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Marianne Heiniemi
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2020

Sisältö

1 Johdanto

Lukion uuden opetussuunnitelman pohjalla on oppimiskäsitys, jonka mukaan oppiminen on opiskelijan aktiivista ja tavoitteellista toimintaa. Oppimisprosessin aikana opiskelija tulkitsee ja analysoi esitettyä tietoa aikeisempien kokemusten ja tiedon pohjalta sekä luo uudenlaisia kokonaisuuksia yhdistäen tietoja ja taitoja. [7] Tämä pro gradu –tutkielma on osa Oulun yliopiston Avoin oppikirja -projektia, jossa tarkoituksena on tarjota avoimeen käyttöön oppimateriaalia lukion pitkän matematiikan kurssille MAA11: *Lukuteoria ja todistaminen*, toteuttaen samalla kokeilevan ja itseohjautuvan oppimiskäsityksen mukaisia tavoitteita. Oppikirjan tehtävissä korostuu opiskelijalähtöisen oppimisen lisäksi myös yhdessä työskentely. Tehtäviä on tarkoitus pohtia vuorovaikutuksessa toisten opiskelijoiden kanssa.

Tässä Avoin oppikirja -projektissa oli mukana viisi tekijää, joiden kesken projekti toteutettiin. *Lukuteoria ja todistaminen* -kurssi jaettiin jokaisen oppimateriaalin tekijän kesken viiteen osa-alueeseen. Tämän tutkielman osuuteen kuuluu kurssin aiheista *alkuluvut* ja *jaollisuuslauseet*. Kokonaisuudessaan tämä pro gradu -tutkielma koostuu perusteluosasta, oppimateriaalista ja opettajan oppaasta. Perusteluosan tarkoituksena on tieteellisten artikkeleiden avulla perustella oppikirjaan valitut tehtävät. Kaikkien oppikirjan tekijöiden kesken valittiin kaksi yhteistä artikkelia, jotka toimivat perustana koko oppikirjalle ja sen tehtäville. Näiden lisäksi oppimateriaalia perustellaan muilla tieteellisillä artikkeleilla.

Oppimateriaali koostuu suurelta osin pohdintatehtävistä, joiden tarkoituksena on antaa opiskelijalle työkaluja uuden tiedon rakentamiseen ja tehtävien ratkaisemiseen. Pohdintatehtävien avulla opiskelijaa myös johdatellaan uuteen teoriaan ja tehtävien ratkaisussa opiskelija hyödyntää aiemmin opittuja tietoja. Oppimateriaali sisältää kuitenkin myös teoriaa. Erityisesti haastavammat asiat on annettu osittain tai kokonaan valmiina. Näihinkin teoriaosioihin liittyy kuitenkin aina lisäksi pohdintatehtäviä, joissa opiskelijan on tarkoitus muodostaa tarkempi käsitys oppimalleen tiedolle. Pohdintatehtävien ja teorian lisäksi oppimateriaali sisältää myös harjoitustehtäviä. Harjoitustehtävät on tarkoitettu lähinnä kotitehtäviksi ja ovat nimensä mukaisesti sitä varten, että niiden avulla harjoitellaan ja vahvistetaan opittua tietoa. Tehtävien ja teorian lisäksi oppimateriaaliin kuuluu opettajan opas, joka sisältää ajankäyttösuunnitelman, vastauksia ja perusteluja pohdintatehtäviin sekä joitakin vinkkejä opettajalle. Viimeisenä oppimateriaalista löytyy vielä vastaukset harjoitustehtäviin.

2 Opetusmateriaalin tavoitteet

2.1 Opetussuunnitelman tavoitteet

Opetushallituksen vuonna 2015 laatiman *Lukion opetussuunnitelman perusteiden* [6] yleisissä tavoitteissa mainitaan ensimmäisenä opiskelijan myönteisen oppimiskokemuksen saaminen ja tottuminen pitkäjänteiseen työskentelyyn. Näiden kautta opiskelija oppii luottamaan omaan matemaattiseen ajatteluunsa sekä omiin taitoihinsa ja kykyihinsä. Toisena tavoitteena on, että opiskelija rohkaistuu ratkaisujen keksimiseen ja niiden kriittiseen arviointiin sekä tutkivaan ja kokeilevaan toimintaan. Nämä tavoitteet näkyvät tämän oppikirjan tehtävissä. Joukossa on muun muassa tehtäviä, joissa opiskelijan on itse osattava päätellä, onko ratkaisu oikein tai mikä ratkaisussa mahdollisesti on väärin.

Lukion opetussuunnitelman yleisenä tavoitteena on myös se, että opiskelija osaa käyttää matematiikan kieltä ja ymmärtää sitä sekä oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä. Koska tämä oppimateriaali on osa kurssia Lukuteoria ja todistaminen, liittyy tämäkin tavoite oleellisesti tähän oppimateriaaliin. Tavoitteina on myös se, että opiskelija oppii lukemaan matemaattista tekstiä ja keskustelemaan matematiikasta. Lisäksi tavoitteena on, että opiskelija oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena sekä oppii kehittämään lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmaratkaisutaitojaan.

Erityisesti Lukuteoria ja todistaminen -kurssin tavoitteita opetussuunnitelmassa ovat opiskelijan perehtyminen logiikan alkeisiin ja tutustuminen todistusperiaatteisiin sekä todistamisen harjoittelu. Tavoitteena on myös, että opiskelija hallitsee lukuteorian peruskäsitteet ja perehtyy alkulukujen ominaisuuksiin. Lisäksi tavoitteena on, että opiskelija osaa tutkia kokonaislukujen jaollisuutta jakoyhtälön ja kokonaislukujen kongruenssin avulla. Opetussuunnitelman tavoitteissa mainitaan myös teknisten apuvälineiden käyttö lukujen ominaisuuksia tutkittaessa. Nämä tavoitteet näkyvät tässä oppikirjassa ja erityisesti tässä osassa oppimateriaalia tulevat esille alkulukujen ominaisuudet ja jaollisuus. [6]

Opetushallituksen uudessa, vuonna 2019 laatimassa opetussuunnitelmassa osa tavoitteista on samanlaisia kuin edellisessä opetussuunnitelmassa. Uusina tavoitteina on kuitenkin esimerkiksi oppilaan kyky rakentaa matemaattista pohjaa jatko-opinnoilleen. Toinen aikaisemmasta poikkeava tavoite on se, että opiskelija rohkaistuu tutkivaan ja kokeilevaan toimintaan sekä ongelmien ratkaisujen keksimiseen ja selkeään esittämiseen. [7] Useat tämän oppikirjan tehtävät vaativat opiskelijalta tutkimista ja pohdintaa sekä ratkaisujen monipuolista esittämistä, mikä tukee tätä tavoitetta.

2.2 Oppikirjan tekijöiden asettamat tavoitteet

Artikkelissa *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [2] on esitelty matematiikan opeiskeluun liittyviä ajattelutapoja, jotka näkyvät tässä opetusmateriaalissa. Artikkelin mukaan matemaattisia tuloksia tärkeämpää on se, millä ajattelutavoilla tuloksiin on päästy. Tarkoituksena ei ole tehdä kaikista lukiolaisista matemaatikkoja, vaan antaa heille keinoja ajatella matemaattisia ongelmia matemaatikon tyyliin. [2] On tärkeää antaa opiskelijoille välineitä, joita he tarvitsevat käyttääkseen ja ymmärtääkseen matematiikkaa sekä käsitelläkseen matemaattisia ongelmia. Artikkelissa esitetyistä ajattelutavoista valitsimme neljä osaksi tämän oppimateriaalin tavoitteita. Nämä ajattelutavat on esitetty alla.

Mallien etsijät - Pattern sniffers

Tässä ajattelutavassa opiskelijan tulisi etsiä mallia tai säännönmukaisuutta, joka auttaisi matemaattisen ongelman ratkaisussa[2]. Tämän tulisi olla apuna opiskelijoilla myös silloin, kun he etsivät ratkaisua ongelmiin, joita ovat itse luoneet. Tähän liittyen artikkelissa mainitaan esimerkkinä jaollisuus seitsemällä ja siihen liittyvä säännönmukaisuus. Lukujen jaollisuuteen toisella luvulla liittyykin sääntöjä, joista toiset ovat hyvin selkeitä ja yksinkertaisia, kuten jaollisuus kahdella ja viidellä, mutta esimerkiksi juuri seitsemällä jaollisuuteen liittyy monimutkaisempia sääntöjä.

Kuvailijat - Describers

Opiskelijan tulisi osata kuvailla matemaattisia ongelmia ja antaa tarkka kuvaus prosessin vaiheista [2]. Asian kuvaileminen on tärkeä osa ymmärtämistä ja matematiikassa tärkeää onkin kyky kertoa, mitä tarkoittaa. Opiskelijan tulisi osata myös kehitellä matemaattinen merkintätapa tai esitys sellaiselle ilmiölle, jolle tavallisella kielellä kuvaileminen on liian hankalaa. Kuvailemiseen liittyy myös kyky vakuuttaa toiset opiskelijat siitä, että jokin tulos on totta tai uskottava. Tätä varten opiskelijan tulisi osata kuvailla todistukset tulokseen liittyen tai esittää jokin yleinen laskelma, joka osoittaa tuloksen todeksi. Näiden lisäksi kuvailemiseen kuuluu se, että opiskelija osaisi kehittää tavan kirjoittaa ajatuksiaan, tuloksia, oletuksia, argumentteja, todisteita, kysymyksiä ja mielipiteitä tekemästään matematiikasta. Tähän liittyvä tärkeä taito on se, että opiskelija tottuisi esittelemään näitä tekemiään muistiinpanoja toisille opiskelijoille. [2]

Nikkarit - Tinkerers

Nikkarointi ajattelutapana tarkoittaa sitä, että kykenee matemaattista ongelmaa pohtiessaan erottelemaan ideoita toisistaan ja sitten yhdistelemään niitä uudestaan eri tavoin. Nikkarointi on matemaattisen tutkimuksen ydin [2]. Siksipä opiskelijankin tulisi kehitellä tapa erotella ideoita kokonaisuuksista ja sitten yhdistellä niitä toisiinsa. Kun opiskelija tekee tämän, hänen tulisi huomata, mitä tapahtuu, jos jotain jätetään pois tai laitetaan erilaiseen järjestykseen, missä ne alun perin olivat. Opiskelijan huomatessa, että jokin matemaattinen ongelma ei ratkea kokeilemallaan tavalla, sen sijaan, että hän ensimmäisenä ajattelisi tehneensä virheen, tulisi opiskelijan pohtia, voisiko tulos jossakin tapauksessa olla mahdollinen tai miten siitä saisi toimivan. Esimerkiksi, kun opiskelija ensin huomaa jokaisen kokonaisluvun olevan alkulukujen tulo, hän voisi seuraavaksi miettiä, onko jokainen kokonaisluku myös alkulukujen summa. [2]

Visualisoijat - Visualizers

Matematiikassa visualisointi voi tarkoittaa jonkin konkreettisen asian visualisointia, joka on luonnostaan visuaalista ja sen voi nähdä. Toisaalta joihinkin ei-visuaalisiin asioihin voidaan keksiä jokin visuaalinen mielikuva, jolloin asian ymmärtäminen on helpompaa [2]. Opiskelija voi visualisoida tietoa esimerkiksi tekemällä taulukoita ja kuvaajia ja käyttää niitä etsiessään ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin. Opiskelija voi käyttää visualisointia erilaisilla tavoilla. Se voi liittyä koko prosessiin, erityisesti laskutoimituksiin, johonkin muutokseen tai ongelmaan liittyvien tekijöiden suhteisiin. [2] Esimerkiksi tekijäpuun avulla opiskelija voi hahmottaa kokonaisluvun alkutekijät.

2.3 Tehtävätyypit

Artikkelissa *Collaborative Learning in Mathematics* esitellään tehtävätyyppejä, jotka poikkeavat perinteisistä matematiikan tehtävistä, joita varten yleensä on annettu valmiit esimerkit ja selitykset. Artikkelin mukaan perinteisen tehtävien sijaan olisi parempi, jos opiskelija omaksuisi aktiivisemman lähestymistavan oppimiseen [9]. Sen sijaan, että opiskelijat ajattelisivat matematiikan olevan vain sarja toisiinsa liittymättömiä menettelytapoja, jotka liittyvät muistamiseen, olisi parempi, että opiskelijat keskustelevat keskenään. Opiskelijoiden kannattaisi selittää ideoita, opettaa toisiaan, luoda kysymyksiä toisilleen ja ratkaista toisten kysymyksiä sekä työskennellä yhdessä jakaen menetelmiään ja tuloksiaan. [9] Valitsimme ryhmämme kanssa artikkelista näihin tavoitteisiin liittyvistä tehtävätyypeistä kolme erilaista, jotka on esitetty tarkemmin alla.

Matemaattisten väitteiden arviointi - Evaluating mathematical statements

Tässä tehtävätyypissä opiskelijan täytyy pohtia lauseiden ja väitteiden todellisuutta. Ovatko lauseet aina tosia, aina epätosia vai joissakin tapauksessa tosia. Perustellakseen päätelmänsä, opiskelijan on usein esitettävä jokin esimerkki tai vastaesimerkki lauseesta. Lisäksi opiskelija voi joutua keksimään joissakin tapauksissa totta olevasta lauseesta sellaisen, että se olisi aina tosi. Tällainen tehtävätyyppi kehittää opiskelijan kykyä selittää, vakuuttaa ja todistaa. [9]

Ongelmien luominen - Creating Problems

Tässä tehtävätyypissä opiskelija luo itse ongelmia, joita ratkaisee ja antaa toisten opiskelijoiden ratkaistavaksi. Tällaisessa tehtävässä opiskelija toimii opettajana ja tukena toisille opiskelijoille. Ongelmaa luodessaan opiskelijan on osattava tehdä tarpeeksi haastava tehtävä, mutta kuitenkin sellainen, joka on ratkaistavissa. [9] Kun opiskelija luo ongelmatehtäviä, hän joutuu pohtimaan omia kykyjään ja sitä, millaisia ongelmatyyppejä on olemassa. Opiskelijan täytyy myös keskittyä ongelmatehtävän erityispiirteisiin, jotka vaikuttavat siihen, kuinka hankala tehtävästä tulee. Ongelmatehtävien luominen auttaa myös kasvattamaan opiskelijan itseluottamusta, kun hän joutuu keskustelemaan matematiikasta ja esittämään tekemiään tehtäviä toisille.

Päättelyn ja ratkaisujen analysointi - Analysin reasoning and solutions

Tällaisessa tehtävätyypissä vastauksen saamisen sijaan pääpaino on päättelymuotojen arvioinnissa ja vertailussa [9]. Tehtävätyyppiin liittyy kolme erilaista alatyyppiä. Tutkimuksen mukaan [9] monet opiskelijat kokevat, että jos heillä ei ole valmista menetelmää ongelman ratkaisuun, he eivät pysty ongelmaa ratkaisemaan. Sellaisen tehtävän, jossa vertaillaan eri ratkaisustrategioita, on tarkoitus antaa opiskelijoille mahdollisuus keskustella ja vertailla keskenään ratkaisutavoista. Tämä lisää opiskelijoiden luottamusta matematiikan käytössä. Tehtävissä saatetaan esimerkiksi pyytää opiskelijoita löytämään mahdollisimman monta erilaista ratkaisutapaa tehtävälle.

Tehtävätyypit, joissa opiskelija joutuu korjaamaan perustelussa tehdyn virheen, vaativat opiskelijalta tehtävän kokonaisvaltaista tarkastelua ja virheen löytämistä tehtävästä [9]. Kolmantena tehtävätyyppinä päättelyn analysointiin liittyy perustelun laittaminen oikeaan järjestykseen. Tehtävänä voi olla todistus, jonka vaiheet on kirjoitettu esille, mutta ne ovat vääräsää järjestyksessä. Opiskelijan tehtävänä on pohtia, mikä olisi todistuksen vaiheiden oikea järjestys. Tässä huomiota kiinnitetään ratkaisun taustalla olevaan logiikkaan ja rakenteeseen, ei niinkään tekniseen tarkkuuteen [9].

3 Opetusmateriaalin perustelut

3.1 Alkuluvut

Oppikirjan alkulukuja ja jaollisuutta käsittelevä osio alkaa alkuluvun määritelmällä. Ennen määritelmää opiskelijaa kuitenkin johdatellaan alkulukuihin pohdintatehtävän A.1 kautta. Opiskelijan tehtävänä on luokitella esitetyt luvut erilaisiin ryhmiin. Hänen on siis keksittävä, mitä yhteistä ja mitä eroa luvuilla on. Opiskelija saattaa luokitella luvut esimerkiksi parittomiin ja parillisiin lukuihin. Tehtävän tarkoituksena olisi kuitenkin, että opiskelija osaa luokitella luvut alkulukuihin ja yhdistettyihin lukuihin ja siten huomaa alkuluvuille ominaisen piirteen. Tämän tehtävän tavoitteena on, että opiskelija ratkaisee tehtävän hyödyntäen taitoaan etsiä säännönmukaisuutta [2]. Tehtävä kuuluu tyypiltään *luokittelutehtäviin*, joka on yksi Swanin artikkelin [9] tehtävätyypeistä.

Eratostheneen seula on yksinkertainen, mutta hyvä apuväline alkulukujen löytämiseen. Sen avulla voidaan määrittää alkuluvut jostakin rajallisesta joukosta lukuja. [3] Pohdintatehtävässä A.4 opiskelijan täytyy määrittää alkuluvut lukujen $2 - 100$ väliltä. Tämän määrittämiseksi opiskelijan täytyy seuloa lukujen joukosta alkuluvut. Algoritmia Eratostheneen seulan taustalla ei vielä tässä vaiheessa ole opetettu, vaan opiskelijan on itse pääteltävä se tehtävässä. Opiskelijaa kuitenkin johdatellaan tehtävän oikeanlaiseen ratkaisuun tehtävänannossa olevien ohjeiden avulla. Tehtävän ratkaisuun liittyy Cuocon ym. artikkelissa [2] esitetty tavoite *nikkarointi*. Tehtävän ohjeistus on luonteeltaan sellainen, että se johdattelee opiskelijaa oikeanlaiseen ratkaisuun. Tehtävän lopussa kysytään, minkä alkuluvun monikerrat eivät enää poista uusia lukuja. Tämä kysymys ohjaa opiskelijan vastaamaan kysymykseen Eratostheneen seulan algoritmista. Näistä ohjeista opiskelija nikkaroi ratkaisun tehtävään. Tehtävässä toteutuu osittain myös tavoite *säännönmukaisuuksien etsiminen*.

Seuraavaksi oppikirjassa esitetään lause A.5, joka perustelee Eratostheneen seulan algoritmin. Tähän johtopäätökseen opiskelija päätyi edellisessä pohdintatehtävässä. Edellisen lauseen ja tehtävän avulla opiskelija muodostaa ja ymmärtää säännön alkulukujen etsimiseen lukujoukosta. Pohdintatehtävässä A.6 on selvitettävä, ovatko kysytyt luvut alkulukuja. Kun aikaisemmat pohdintatehtävät on tehty ja lause A.5 on tuttu, pitäisi opiskelijan osata tehdä tehtävä löytämiään säännönmukaisuuksia [2] apuna käyttäen.

Oppikirjan seuraava kappale käsittelee *Aritmetiikan peruslausetta*. Aritmetiikan peruslauseen yksikäsitteisyys käsitellään oppikirjan myöhemmässä kappaleessa samalla, kun käsitellään jaollisuus alkuluvuilla. Vaikka Aritmetiikan peruslauseen todistus ei ole varsinaisesti hankalaa, ei se kuitenkaan ole itsestäänselvyyskään. Martin Griffithsin artikkelin *Intuiting the fundamental theorem of arithmetic* mukaan Aritmetiikan peruslauseen todistamiseen ja sen ymmärtämiseen tarvitaan tietoja, joita harvat lukiolaiset tietävät ja vielä harvemmat osaavat käyttää. Siksi onkin todennäköisempää, että opiskelija, joka pystyy osoittamaan ymmärtäneensä Aritmetiikan peruslauseen taustalla olevan rakenteen, tekee sen intuitiivisesti ja visuaalisesti kaavioita käyttäen. Opiskelija ikään kuin rakentaa oman versionsa lauseesta, vaikka ei sitä vielä tunnekaan. [4]

Artikkelin [4] mukaan ennen Aritmetiikan peruslauseen opettelua alkutekijäpuu onkin yksi hyvistä keinoista tutustua aiheeseen. Alkutekijäpuuta rakentaessa opiskelija opettelee jakamaan luvun alkutekijöihin. Pohdintatehtävässä A.7 opiskelijan on pääteltävä, miten alkuun tehty tehtävä jatkuu. Lisäksi opiskelija pääsee keksimään itse toiselle opiskelijalle tehtävän [9]. Opiskelijan ratkaistessa ensin itse tehtävää, hänen tulee etsiä tehtävästä säännönmukaisuus [2], jonka avulla tehtävän voi suorittaa loppuun. Tähän liittyy myös tehtävätyyppi, jossa tehtävän ratkaisuun liittyy visualisointi [2]. Luvun jakamista alkulukuihin harjoitellaan kaavion avulla. Tässä tapauksessa kaaviona toimii alkutekijäpuu. Opiskelijan luodessa tehtävää toiselle opiskelijalle, hänen on kiinnitettävä huomiota tehtävän vaikeustasoon [9]. Opiskelija pääsee tehtävää luodessaan pohtimaan tehtävää käänteisessä järjestyksessä. Tämä auttaa häntä mahdollisesti hahmottamaan paremmin, kuinka kokonaisluvut muodostuvat alkuluvuista. Tarkoituksena ei ole vain kokeilemalla selvittää, onko jokin luku alkuluku, vaan tavoitteena on, että opiskelija luo tehtävän kertomalla alkulukuja keskenään ja näin saa muodostettua jonkin kokonaisluvun, jonka voi antaa toiselle opiskelijalle ratkaistavaksi.

Tutkimuksien mukaan opiskelijan taito ajatella kriittisesti, on yhteydessä hänen koulumenestykseensä [1]. Useat opiskelijat eivät kuitenkaan omaa riittävän hyvää taitoa ajatella tehtäviä ja niiden ratkaisuja kriittisesti. Jotta opiskelijat pystyisivät omaamaan paremmin kriittisen ajattelun taitoja, pitäisi Abdur Rahman As'arin tutkimuksen *Our Prospective Mathematic Teachers Are Not Critical Thinkers Yet* mukaan opettajien kehittää ensin omaa kriittisen ajattelun taitoaan. Tämän myötä opettajat pystyisivät luomaan tehtäviä ja opettamaan niin, että opiskelijoiden taito ajatella kriittisesti kehittyisi.[1] Tämän oppikirjan useat tehtävät on luotu niin, että opiskelijan on pohdittava perusteluja tehtävän ratkaisulle, mikä puolestaan vaatii tehtävän ja sen ratkaisun kriittistä tarkastelua. Pohdintatehtävässä A.9 opiskelija tarkastelee valmiiksi tehtyä todistusta Aritmetiikan peruslauseesta. Opiskelijan tehtävänä on kertoa ensin omin sanoin, mitä todistuksessa on tehty. Sen jälkeen hänen pitää vastata vielä todistukseen liittyviin kysymyksiin. Tehtävä on siis tyypiltään päättelyn ja ratkaisun analysointia [9] jossa huomioidaan myös kriittisen ajattelun taidot [1].

Tutkimuksien mukaan monet opettajat uskovat, että konstruktivistinen oppiminen, missä opiskelija itse rakentaa tietoa itselleen jo aiemmasta omaavastaan tiedosta, on tehokkaampi tapa oppia kuin se, että opettaja rakentaisi tiedon opiskelijoille [11]. Opiskelijalähtöisessä oppimisessa opiskelijat oppivat parhaiten, kun osaavat itse yhdistää aiemmin oppimansa tiedon uuteen tietoon. Omilla aiemmilla oppimiskokemuksilla on tärkeä rooli uuden oppimisessa. Opiskelijoita pitäisi rohkaista keskustelemaan myös enemmän keskenään. Riittävän haastavien tehtävien luomisesta opiskelijoille seuraa se, että opiskelijoiden on keskusteltava tehtävistä keskenään. Taito keskustella tehtävästä puolestaan auttaa opiskelijoita oppimaan ja ymmärtämään tehtäviä paremmin. Tutkimuksen mukaan opiskelijat myös tuntevat olonsa mukavammaksi luokkatilanteessa, kun tehtävistä totutaan keskustelemaan yhdessä. Tehtävistä yhdessä keskusteltaessa ei kehity pelkästään opiskelijan taito esiintyä ja esittää omia näkemyksiään vaan myös toisten opiskelijoiden kuunteleminen. [11] Kuunnellessa toisia opiskelijoita opiskelija saa uudenlaisia näkökulmia asiaan ja oppii esimerkiksi tarkastelemaan tehtävää erilaisesta näkökulmasta, kuin mistä itse sitä oli tarkastellut. Tämän oppikirjan tehtävistä useat ovat opiskelijalähtöisiä tehtäviä, joissa opiskelija hyödyntää aiemmin oppimaansa tietoa.

Suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen monikerta ovat opiskelijalle tuttuja oppikirjan aiemmasta osiosta. Nyt opiskelija pääsee hyödyntämään näitä aiemmin oppimiansa taitoja [11] alkulukuihin jakamisessa. Pohdintatehtävässä A.12 on laskettu lukujen suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen monikerta. Tehtävään on merkittynä välivaiheita, mutta ei perusteluja. Opiskelijan täytyy miettiä, mitä ratkaisun vaiheissa on tehty ja miten vastaukseen on päädytty. Tämän jälkeen opiskelijan täytyy päätelmänsä avulla vielä itse jakaa annetut luvut alkutekijöihin. Tässä tehtävässä opiskelija käyttää ajattelutapana nikkarointia ja mallien etsimistä [2]. Opiskelija pohtii säännönmukaisuutta tehtävässä, jotta pystyy ensin perustelemaan tehtävän etenemisen. Tekemänsä päätelmän sekä aiemmin oppimansa tiedon perusteella [11] opiskelija ideoita yhdistellen saa ratkaistua tehtävän.

John Allen Paulos kertoo teoksessaan *Innumerancy* ihmisten pelosta liittyen matematiikkaan [8]. Tällaisesta matematiikan pelosta saattaa seurata se, että henkilö luovuttaa matematiikan suhteen liian helposti. Nähdessään hankalan näköisen tehtävän, opiskelija saattaa luovuttaa, ennen kuin on edes oikeasti yrittänyt pohtia tehtävää. Tämä luo esteen matematiikan ymmärtämiselle. Paulosin mukaan [8] hyväksi havaittu keino tämän estämiseksi on tehtävien ääneen lukeminen. Kuunnellessaan toisen lukevan tehtävää ääneen, laittaa se opiskelijan pohtimaan enemmän ja lisäajattelun myötä pohdinta johtaa johonkin tulokseen. Pohdintatehtävä A.13 on sanallinen tehtävä, jossa ei ole annettu paljon lähtötietoja tehtävän ratkaisuun, vaan opiskelijoiden on itse pääteltävä millainen tehtävä on kyseessä ja miten sen ratkaisua lähdetään muodostamaan. Tehtävän tarkoituksena on harjoitella pienimmän yhteisen monikerran ratkaisemista, joten ideana olisi sen avulla selvittää, kuinka paljon tapahtumaan osallistuu opiskelijoita, kun heidät on jaettu tietyn kokoisiin ryhmiin. Opiskelijat pohtivat tehtävää pareittain ja lukevat sen ääneen toisilleen. He pääsevät selittämään toisilleen omia näkemyksiään tehtävästä ja sen ratkaisemisesta. Tässä tehtävässä opiskelija harjoittelee esittämisen lisäksi myös toisten esittämien ideoiden ja näkemysten kuuntelua ja arviointia. Ääneen lukeminen auttaa molempia opiskelijoita ja laittaa heidät ajattelemaan. Aluksi hankalalta kuulostava tehtävä saattaa ratketa helpommin yhdessä pohtien ja ajatuksia jakaen.

3.2 Jaollisuuslauseita

Pohdintatehtävät A.14 ja A.16 liittyvät alkulukujen jaollisuuteen ja erityisesti Eukleideen lemmaan. Molemmissa vaaditaan opiskelijalta kriittistä tarkastelua [1]. Tehtävässä A.14 opiskelijaa johdatellaan aiheeseen pohdinnan avulla. Opiskelijan täytyy ensin tutkimalla selvittää, onko kokonaislukujen tulossa välttämättä toinen tulon tekijöistä jaollinen sillä luvulla, millä myös tulo on jaollinen. Tehtävässä on kaksi tällaista kohtaa, jotka näyttävät samanlaisilta. Ero kohtien välillä on kuitenkin se, että toisessa jakajana on alkuluku ja toisessa yhdistetty luku. Tässä opiskelija hyödyntää aiemmin oppimaansa tietoa alkuluvuista [11] ja sen avulla hänen olisi tarkoitus ymmärtää ero tehtävien välillä [2]. Tehtävän viimeisessä kohdassa kysytään vielä erikseen eroa kysymysten välillä. Nyt opiskelijan on tutkittava tekemäänsä päätelmää ja viimeistään tässä vaiheessa perusteltava, mihin hänen päätelmänsä perustuu [9].

Pohdintatehtävässä A.16 on esitetty Eukleideen lemman todistuksen vaiheita, jotka ovat väärässä järjestyksessä. Opiskelijan tehtävänä on laittaa vaiheet oikeaan järjestykseen. Tätä varten opiskelija tarvitsee jälleen kriittistä ajattelua [1]. Tehtävätyypiltään tämä pohdintatehtävä kuuluu niihin, joissa opiskelijan on analysoitava tehtävän ratkaisua [9].

Griffithsin Artikkelin [4] mukaan opiskelijalla on oltava tietoisuus tietyistä asioista ymmärtääkseen Aritmetiikan peruslauseen. Näistä yksi on ymmärtäminen, että sama luku voidaan kirjoittaa useamman luvun tulona eri tavalla, mutta kuitenkin alkulukujen tulona kirjoitettuna hajotelmia on vain yksi. Tähän liittyykin Aritmetiikan peruslauseen yksikäsitteisyys ja tätä harjoitellaan pohdintatehtävässä A.18. Tutkimuksen mukaan [4] opiskelija päätyy intuition ja tutkimisen avulla siihen tulokseen, että luvulla on olemassa vain yksi alkuhajotelma. Opiskelija pystyy myös soveltamaan Aritmetiikan peruslausetta sellaiseen matematiikan osa-alueeseen, joka on hänelle vielä tuntematon. [4] Pohdintatehtävässä A.19 opiskelija pohtii edellistä tehtävää uudestaan. Nyt hänellä on teoriatieto taustalla ja hän pystyy tekemään tehtävän sen avulla. Opiskelija pääsee myös itse tutkimaan tehtävistä saamiensa ratkaisujen eroavaisuuksia ennen ja jälkeen Aritmetiikan peruslauseen yksikäsitteisyyden todistusta.

Oppikirjan viimeinen aihe käsittelee jaollisuussääntöjä. John Westin artikkelin [10] *Divide and conquer - A hands-on exploration of divisibility* mukaan tutkimustulokset osoittavat, että jaollisuussääntöjen ymmärtäminen vaatii syvällistä ymmärrystä sääntöjen taustalla. Opiskelijan ei pitäisi vain muistaa ulkoa jaollisuussääntöjä, vaan myös ymmärtää niiden taustalla oleva perusta. Westin mukaan jaollisuutta koskevissa säännöissä opiskelijoilla on usein myös virhekäsityksiä. Pohdintatehtävässä A.21 opiskelija tutkii ensin annettuja lukuja ja niiden jaollisuutta neljällä. Sen jälkeen hän muodostaa tehtävässä annetun vihjeen avulla säännön neljällä jaollisuudelle. Tätä tehtävää ennen oppikirjassa on perusteltu jaollisuussäännöt viidelle ja kymmenelle ja näiden sääntöjen avulla opiskelijan on tarkoitus myös perustella päättelemänsä neljällä jaollisuuden sääntö. Tässä pohdintatehtävässä opiskelija toteuttaa säännönmukaisuuksien etsintää ja nikkarointia [2].

Pohdintatehtävässä A.23 opiskelijan täytyy löytää säännöt jaollisuuteen luvuilla 3 ja 9. Tehtävä alkaa sillä, että opiskelijan on tutkittava luvun numeroiden summaa ja myöhemmin sitä kautta hänen tulisi huomata, että lukujen 3 ja 9 jaollisuuksien säännöt liittyvät jaettavan luvun numeroiden summaan. Tehtävässä on annettu erilaisia lukuja, joista osa on jaollisia vain kolmella ja osa on jaollisia molemmilla. Joukossa on myös lukuja, jotka eivät ole jaollisia kummallakaan. Opiskelijan tehtävänä on luokitella [9] luvut tehtävässä annettuihin laatikoihin niiden jaollisuuden mukaan. Tehtävän lisäkysymysten avulla opiskelija huomaa, että yhdeksällä jaollisten lukujen laatikossa on lopulta samat luvut kuin yhdeksällä ja kolmella molemmilla jaollisten laatikossa. Tehtävässä tulle siis ilmi, että yhdeksällä jaolliset luvut ovat jaollisia myös kolmella. Opiskelijan on lisäksi pohdittava, onko kolmella jaollinen luku aina jaollinen myös yhdeksällä. Väitteen pystyy helposti osoittamaan vääräksi vastaesimerkin avulla. Tässä tehtävässä esille nouseva tavoite on Cuocon ym. artikkelista tuttu nikkarointi [2].

Pohdintatehtävässä A.24 on tutkittu jaollisuutta luvulla 7 ja tarkastelussa muodostuneet päätelmät on kirjoitettu muistiin. Tehtävässä on tutkittu kolmen eri luvun jaollisuutta seitsemällä. Tehtävään on merkitty välivaiheita ja näiden välivaiheiden kautta on tultu siihen tulokseen, että kaksi luvuista on jaollisia seitsemällä, mutta yski ei ole. Opiskelijan tehtävänä on päätellä tehdyn tehtävän ja välivaiheiden avulla, mikä on seitsemällä jaollisuuden sääntö. Tehtävässä keskeistä on päättelyn analysoiminen [9] ja sen avulla säännön muodostaminen seitsemällä jaollisuudelle [2].

Kun opiskelija tuntee tietyt jaollisuussäännöt, hän voi päätellä myös suuremmilla luvuilla jaollisuuden. Pohdintatehtävässä A.25 opiskelijan tehtävänä on pohtia esitettyjä jaollisuuteen liittyviä kysymyksiä. Tehtävässä kysytään luvun jaollisuutta suuremmilla luvuilla, jotka ovat kahden tai kolmen pienemmän luvun tuloja. Näiden pienempien lukujen jaollisuussäännöt ovat opiskelijalle tuttuja aikaisemmista pohdintatehtävistä. Johdattelevien kysymysten avulla tehtävässä päädytään seuraavaksi oppikirjassa esitettyjen jaollisuuslauseiden johtopäätöksiin. Tässä pohdintatehtävässä opiskelija hyödyntää aiemmin oppimaansa tietoa jaollisuudesta ja rakentaa vastauksensa sen pohjalta [11]. Opiskelija hyödyntää myös tietoaan alkuluvuista ja suurimmasta yhteisestä tekijästä sekä käyttää apunaan tehtävässä annettua kysymysten muodossa olevaa tietoa. Lisäksi opiskelija toteuttaa oppikirjan tavoitteissa mainittua mallien etsimistä [2].

Lähdeluettelo

[1] As'ari, A. R., Mahmudi, A., Nuerlaelah, E. *Our Prospective Mathematic Teachers Are Not Critical Thinkers Yet*. Journal on Mathematics Education, Vol. 8, No. 2: 145-156, 2017.

[2] Cuoco, A., Goldenberg, E. P., Mark, J. *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula*. The Journal of Mathematical Behavior, 15: 375-402, 1996.

[3] de Mestre, N. *Discovery: Prime Numbers*. Australian Association of Mathematics Teachers, Vol. 17, Iss. 3: 4-8, 2008.

[4] Griffiths, M. *Intuiting the fundamental theorem of arithmetic*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 82, Iss. 1: 75-96, 2013.

[5] Heiskanen, P., Kaakinen, P. ym. *Tekijä pitkä matematiikka 11 – Lukuteoria ja todistaminen*. Sanoma Pro, 2017.

[6] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*.

[7] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*.

[8] Paulos, J. *Innumerancy.* Hill and Wang. New York, 1988.

[9] Swan, M. *Collaborative Learaning in Mathematics: A Challenge to Our Beliefs and Practices*, 162–176, 2006.

[10] West, J. *Divide and conquer - A hands-on exploration of divisibility*. Australian Primary Mathematics Classroom, Vol. 19, Iss. 4: 15-19, 2014.

[11] Zain, S., Rasidi, F., Abidin, I. *Student-Centred Learning In Mathematics - Constructivism In The Classroom*. Journal of International Education Research, Vol. 8, Iss. 4: 319-328, 2012.

A Alkuluvut ja jaollisuuslauseita

A.1 Alkuluvut

Pohdinta A.1 Tutki alla olevia lukuja. Millä kaikilla tavoilla pystyt luokittelemaan luvut. Millaisia ryhmiä saat muodostettua luvuista ja mitä ominaisuuksia jaottelemillasi luvuilla on?

$$2, 5, 9, 11, 17, 21, 24, 35$$

Keksi kaikkiin ryhmiin vielä kolme lukua.

Määritelmä A.2 Lukua 1 suurempi kokonaisluku, joka on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1 on *alkuluku*. Jos lukua 1 suurempi luku ei ole alkuluku, se on *yhdistetty luku*.

Esimerkki A.3 Tarkastellaan lukuja 15 ja 5. Huomataan, että luku 15 on yhdistetty luku, sillä se on jaollinen luvuilla 1, 3, 5 ja 15. Luku 5 on kuitenkin jaollinen vain itsellään ja luvulla 1, joten se on alkuluku.

Pohdinta A.4 Eratostheneen seula on algoritmi, jota voidaan hyödyntää määritettäessä alkulukuja jostain äärellisestä joukosta. Alla on taulukoituna kokonaisluvut 2 – 100. Etsi taulukosta ensimmäinen alkuluku. Päättele tämän luvun avulla, mitkä luvuista eivät ainakaan ole alkulukuja ja yliviivaa ne. Näin saat poissuljettua yhdistettyjä lukuja. Etsi järjestyksessä seuraava alkuluku ja jälleen poissulje tähän alkulukuun liittyvät yhdistetyt luvut. Jatka seulomista niin kauan, kunnes olet löytänyt kaikki alkuluvut.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Minkä alkuluvun monikerrat eivät enää poista uusia lukuja?

Mikä on Eratostheneen seulan taustalla oleva algoritmi?

Jokaisella yhdistetyllä luvulla on olemassa tekijä, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin kyseisen luvun neliöjuuri. Tämä tekijä voidaan esittää alkulukujen tulona.

Lause A.5 Jos luku ei ole jaollinen millään alkuluvulla, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin luku $\sqrt{n}$, niin silloin luku n on alkuluku.

Pohdinta A.6 Käytä apuna edellistä lausetta A.5 ja tutki, ovatko luvut

a) 479

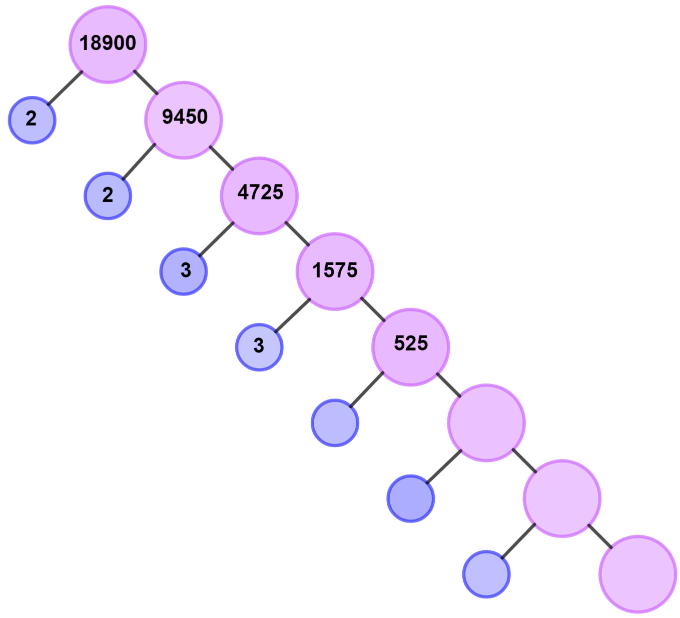
b) 729 alkulukuja.

Tarkastellaan lukua 20. Tiedetään, että luku 20 on yhdistetty luku eli se voidaan kirjoittaa kahden tai useamman lukua 1 suuremman luvun tulona.

Nyt $20 = 2 \cdot 10$.

Voidaan kuitenkin jakaa vielä luku 10 tekijöihin ja saadaan $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Huomataan, että kaikki tekijät ovat alkulukuja. Luku 20 on nyt esitetty *alkulukujen tulona* ja tuloa $2 \cdot 2 \cdot 5$ sanotaan luvun 20 *alkulukuhajotelmaksi*. Luvun *alkutekijä* on sellainen tekijä, joka on alkuluku.

Pohdinta A.7 Tehtävässä on aloitettu tekemään alkutekijäpuuta. Tarkastele puuta ja mieti, mitä siinä on tehty. Tee alkutekijäpuu valmiiksi. Mistä tiedät, milloin puu on valmis?



Keksikää parin kanssa toisillenne jokin luku, josta toinen voi tehdä alkutekijäpuun. Älä kuitenkaan valitse mitä tahansa lukua vaan pohdi, millaiseen puuhun tulisi mahdollisimman paljon oksia.

Lause A.8 Aritmetiikan peruslause

Jokainen lukua 1 suurempi kokonaisluku voidaan esittää alkulukujen tulona.

Aritmetiikan peruslauseen nojalla tiedetään, että kaikki lukua 1 suuremmat kokonaisluvut voidaan esittää alkulukujen tulona. Lisäksi tiedämme, että tulon tekijät voidaan esittää vain yhdellä tavalla. Tässä oletetaan, että kertolaskussa tulontekijöiden paikan vaihtaminen ei muuta tuloa.

Jos luku 1 olisi määritelty alkuluvuksi, olisi Aritmetiikan peruslauseen muotoilu hankalampaa, sillä silloin kaikki kokonaisluvut voitaisiin esittää useammalla eri tavalla luvun 1 avulla.

Pohdinta A.9 Alla on esitetty induktiotodistus alkulukuhajotelman olemassaolosta.

Oletus: Olkoon n kokonaisluku, joka on suurempi kuin 1.

Väite: Luku n voidaan kirjoittaa alkulukujen tulona.

Todistus.

1) Alkuaskel

Osoitetaan, että väite pitää paikkansa, kun $n = 2$.

Luvun 2 alkulukuhajotelma on luku 2 itse, sillä se on alkuluku.

Alkuaskel on siis tosi.

2) Induktioaskel

Induktio-oletus:

Lukua 1 suuremmat kokonaisluvut $(2, 3, ..., n), n \geq 2$ voidaan esittää alkulukujen tulona.

Induktioväite:

Voidaan esittää luku $n + 1$ alkulukujen tulona.

Induktioväitteen todistus:

Ensimmäisessä tapauksessa oletetaan, että $n + 1$ on alkuluku. Silloin sen alkulukuhajotelma on luku $n + 1$ itse.

Toisessa tapauksessa luku $n+1$ puolestaan ei ole alkuluku. Silloin se voidaan esittää kahden kokonaisluvun tulona $n + 1 = ab$, missä $2 \leq a < n$, $2 \leq b < n$ ja $a, b \in \mathbb{Z}$ tulona.

Koska $a \geq 2$ ja $b \geq 2$, voidaan luvut a ja b esittää Induktio-oletuksen mukaan alkulukujen tuloina $a = a_1 a_2 \ldots a_k$ ja $b = b_1 b_2 \ldots b_l$

Tämän perusteella luku $n + 1$ voidaan myös esittää alkulukujen tulona $n + 1 = ab = a_1 a_2 \ldots a_k b_1 b_2 \ldots b_l$

Induktioväite on siis tosi.

Nyt on todistettu alkuaskel ja induktioaskel, joten väite on siis tosi.

$\square$

Selitä omin sanoin, mitä todistuksessa on tehty.

Miksi todistuksessa käsiteltiin kaksi erilaista tapausta?

Miksi toisessa tapauksessa lukujen a ja b on oltava suurempia tai yhtä suuria kuin luku 2?

Kun aritmetiikan peruslause tunnetaan, voidaan sen avulla todistaa, että alkulukuja on ääretön määrä.

Lause A.10 Eukleideen lause

Alkulukuja on äärettömän paljon.

Todistus.

Jotta saadaan todistettua, että alkulukuja on ääretön määrä, riittää osoittaa, että mikään äärellinen joukko lukuja ei voi sisältää kaikkia alkulukuja.

Oletus: Joukko $p_1, p_2, \ldots, p_n$ on mielivaltainen joukko alkulukuja.

Väite: On olemassa jokin sellainen alkuluku, joka ei ole mikään luvuista $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Todistus: Muodostetaan uusi luku k, joka määritellään seuraavasti: $k = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

Jälleen on kaksi tapausta, jotka käsitellään. Jos k on alkuluku ja tiedetään, että se on suurempi kuin mikään alkuperäisen joukon luvuista, olemme löytäneet alkuluvun, joka ei kuulu alkuperäiseen joukkoon.

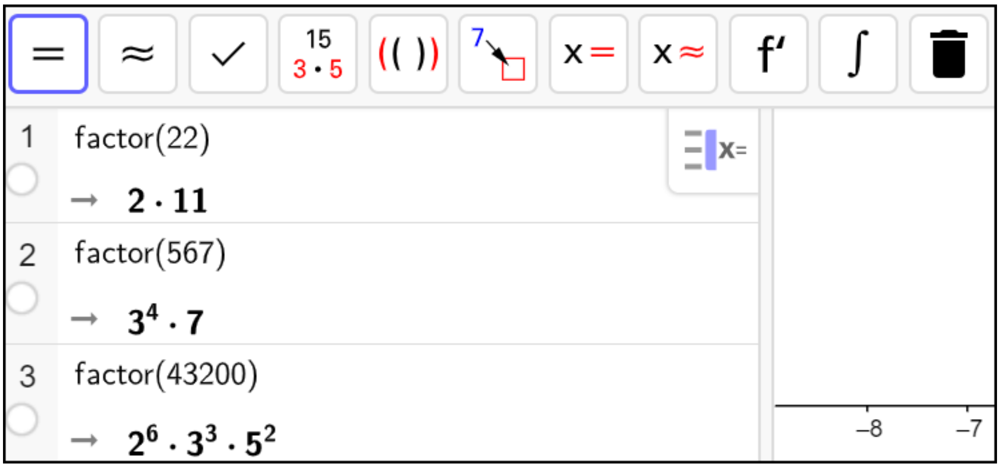
Jos taas k ei ole alkuluku, tiedetään, että aritmetiikan peruslauseen nojalla se on jaollinen jollakin alkuluvulla. Tämä alkuluku ei kuitenkaan voi olla mikään alkuperäisen joukon luvuista, sillä jaettaessa luku millä tahansa näistä luvuista, saadaan jakojäännökseksi luku 1. Tämä tarkoittaa sitä, että jälleen on löydetty alkuluku, joka ei kuulu alkuperäiseen lukujoukkoon.

Näistä päätelmistä seuraa, että mikään äärellinen joukko lukuja ei voi sisältää kaikkia alkulukuja. Siten alkulukuja on äärettömän paljon.

□

Suurin yhteinen tekijä (syt) ja pienin yhteinen monikerta (pym) on käsitelty tarkemmin tämän oppikirjan aiemmassa osiossa. Seuraavaksi tutustutaan siihen, kuinka syt ja pym voidaan määritellä alkulukuhajotelman avulla. Luvun alkulukuhajotelman voi selvittää myös laskimen tai GeoGebran avulla käyttämällä factor komentoa.

Mallitehtävä A.11 Luvun alkulukuhajotelman voi selvittää GeoGebran factor-komentoa käyttäen. Toimintoa voi käyttää GeoGebran CAS-näkymässä. Kirjoittamalla syöttökenttään factor-komennon ja sulkuihin kokonaisluvun, jonka hajotelma halutaan selvittää, antaa GeoGebra suoraa oikean vastauksen.



Lukujen 22, 567 ja 43200 alkulukuhajotelmat ovat

$$22 = 2 \cdot 11$$

$$567 = 3^4 \cdot 7$$

$$43200 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

Pohdinta A.12 Alla on laskettu lukujen 3960, 2100, ja 600 suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen monikerta.

$3960 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

$2100 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

$600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

$$\text{syt}(3960, 2100, 600) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$\text{pym}(3960, 2100, 600) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 138600$$

Millä perusteella syt ja pym on saatu? Minkä säännön löydät näiden laskemiseen?

Laske nyt päättelemäsi säännön avulla lukujen 84, 630 ja 1050 suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen monikerta.

Pohdinta A.13 Pohdi tehtävää yhdessä parin kanssa. Lukekaa tehtävä ääneen ja lähtekää yhdessä rakentamaan ratkaisua tehtävälle.

Koulun teemapäivässä oli työpisteitä, joissa opiskelijoita jaettiin erikokoisiin ryhmiin. Kulttuuripisteellä opiskelijat jaettiin kuuden hengen ryhmiin, musiikkipisteellä seitsemän hengen ryhmiin ja liikuntapisteellä kahdeksan hengen ryhmiin. Yksi koulun opiskelijoista toimi opettajien apuna teemapäivän aikana, joten hän ei ollut mukana ryhmissä. Kuinka monta opiskelijaa tapahtumaan osallistui yhteensä? Tiedetään, että opiskelijoita oli alle 400.

A.1.1 Harjoitustehtäviä

1. Ovatko luvut

a) 521

b) 807

c) 949 alkulukuja?

2. Käytä Eratostheneen seulaa ja määritä alkuluvut lukujoukosta $\{100, 101, \ldots, 200\}$.

3. Mitä lukua pienemmät luvut voidaan osoittaa alkuluvuiksi, jos tehdään korkeintaan seitsemän jakolaskua?

4. Esitä luvun alkulukuhajotelmat.

a) 5187

b) 12100

c) 64350

5. Osoita, että kaikkia kokonaislukuja, jotka ovat suurempia kuin 3, ei voi esittää kahden alkuluvun summana.

6. Esitä luku $2 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 27$ jonkin kokonaisluvun neliönä.

7. Käytä GeoGebraa ja jaa luvut alkutekijöihin.

a) 3310560

b) 98345

c) 103811

8. Määritä lukujen syt ja pym.

a) 120 ja 325

b) 7, 49 ja 77

c) 56, 79 ja 123

A.2 Jaollisuuslauseita

Pohdinta A.14

a) Oletetaan, että kokonaislukujen a ja b tulo ab on jaollinen luvulla 5. Onko jommankumman tulontekijöistä välttämättä oltava jaollinen luvulla 5? Voit etsiä ratkaisua kysymykseen kokeilemalla erilaisia vaihtoehtoja.

b) Entäpä jos oletetaan, että kokonaislukujen a ja b tulo ab on jaollinen luvulla 9. Onko nyt luvun a tai b välttämättä oltava jaollinen luvulla 9?

c) Mistä johtuvat kohtien a ja b toisistaan poikkeavat vastaukset?

Lause A.15 Eukleideen lemma

Jos kokonaislukujen a ja b tulo ab on jaollinen alkuluvulla p, niin ainakin toinen luvuista a ja b on jaollinen luvulla p.

Pohdinta A.16 Oppikirjan edellisessä osassa on opiskeltu *Eukleideen algoritmi*. Eukleideen lemman todistus perustuukin siitä saatavaan yhtälöön. Yhtälö liittää yhteen luvut ja niiden suurimman yhteisen tekijän. Alla on esitetty Eukleideen lemman todistus, mutta tässä todistuksessa osa vaiheista on kuitenkin mennyt sekaisin. Laita todistuksen vaiheet 1-6 oikeaan järjestykseen.

Todistus.

Oletus: Kokonaislukujen a ja b tulo ab on jaollinen luvulla p, joka on alkuluku.

Väite: Toinen luvuista a tai b on jaollinen alkuluvulla p.

Todistus: Väite on tosi, jos luku a on jaollinen luvulla p.

1. On olemassa kokonaisluku q siten, että $ab = pq$, koska tulo ab on jaollinen luvulla p. Sijoitetaan yhtälöön $ab = pq$.

$$\begin{aligned} pbx + aby &= b \\ pbx + pqy &= b \\ p(bx + qy) &= b \end{aligned}$$

2. Tämän yhtälön molemmat puolet kerrotaan luvulla b.

$$\begin{aligned} px + ay &= 1 \\ pbx + aby &= b \end{aligned}$$

3. Osoitetaan, että luku b on välttämättä jaollinen luvulla p, jos oletetaan, että luku a ei ole jaollinen luvulla p.
4. Nyt syt(a, p) = 1, koska luku p ei ole luvun a tekijä ja luvun p ainoat tekijät ovat luku 1 ja luku itse eli luku p. Tällöin voidaan Eukleideen algoritmilla osoittaa, että on olemassa sellaiset kokonaisluvut x ja y, että

$$px + ay = 1.$$

5. Luvun $bx + qy$ ollessa kokonaisluku, on luku b siis jaollinen luvulla p.

6. Täten väite on tosi.

□

Induktion avulla voidaan yleistää Eukleideen lemma useamman kokonaisluvun tulolle.

Lause A.17 Eukleideen lemman yleistys

Kokonaislukujen tulossa ainakin yksi tulon tekijöistä on jaollinen alkuluvulla p, jos tulo on jaollinen alkuluvulla p.

Pohdinta A.18 Tutki ilman laskinta, ovatko luvut

a) $24 \cdot 45$ ja $18 \cdot 60$

b) $168 \cdot 42$ ja $9 \cdot 392$

yhtä suuret?

Perustele vastauksesi.

Aritmetiikan peruslauseen yksikäsitteisyys

Aritmetiikan peruslauseen mukaan

1) Alkulukujen tulona voidaan esittää kaikki lukua 1 suuremmat kokonaisluvut.

2) Tulon tekijät on mahdollista valita vain yhdellä tavalla.

Ensimmäinen kohta on todistettu aiemmin käsiteltäessä Aritmetiikan peruslausetta. Toinen kohta voidaan todistaa käyttäen Eukleideen lemmaa.

Todistus.

Oletus: $n \geq 2$ on kokonaisluku.

$n = p_1 p_2 \ldots p_r$ ja

$n = q_1 q_2 \ldots q_s$,

missä luvut $p_1 p_2 \ldots p_r$ ja $q_1 q_2 \ldots q_s$ ovat alkulukuja.

Väite: Tulot $p_1 p_2 \ldots p_r$ ja $q_1 q_2 \ldots q_s$ ovat samanlaiset, järjestystä lukuun ottamatta.

Todistus: Esitetään luku n kahdella eri tavalla.

$$n = p_1 p_2 \dots p_r$$
$$n = q_1 q_2 \dots q_s$$

Hajotelmat on kirjoitettu ilman eksponentteja, joten molemmissa voi olla mukana sama tekijä useampaan kertaan. Molempien hajotelmien esittäessä samaa lukua n, voidaan kirjoittaa

$$p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s.$$

Nähdään, että yhtälön vasen puoli on jaollinen luvulla p_1, joten silloin myös yhtälön oikea puoli on jaollinen luvulla p_1. Jokin luvuista $q_1, q_2, \dots, q_s$ on siis Eukleideen lemman perusteella jaollinen luvulla p_1. Koska lukujen nimeämisellä ei ole merkitystä, voidaan oletetaan tämän luvun olevan q_1. Luku q_1 voi olla jaollinen luvulla p_1 vain silloin, kun $q_1 = q_2$, koska q_1 on itsekin alkuluku. Täten yhtälö saadaan alla esitettyyn muotoon.

$$\begin{aligned} p_1 p_2 \dots p_r &= q_1 q_2 \dots q_s \\ p_2 \dots p_r &= q_2 \dots q_s \end{aligned}$$

Samalla päätelmällä voidaan osoittaa, että $p_2 = q_2$ ja näin saadaan yhtälö jälleen yksinkertaisempaan muotoon, kun se jaetaan luvulla p_2. Kun tätä jatketaan, löydetään jokaiselle p luvulle vastaava q luku ja näin saadaan joka askeleella jaettua yksi tekijä pois, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$p_r = q_s.$$

Täten hajotelmien täytyy koostua täsmälleen samoista luvuista, joita on saman verran. Väite on siis tosi. □

Pohdinta A.19 Pohdi ensin, mitä edellä esitetystä todistuksesta oikeastaan selvisi?

Tutki seuraavaksi uudestaan pohdintatehtävää A.18 yhdessä parisi kanssa. Tekisitkö tehtävän nyt samalla tavalla kuin aiemmin vai tekisitkö jotain toisin? Keskustelkaa parisi kanssa ja vertailkaa ratkaisujanne. Ovatko ne samanlaiset?

Kokonaislukujen jaollisuudelle tietyillä luvuilla on olemassa jaollisuussääntöjä. Joillakin luvuilla säännöt ovat yksinkertaisia, mutta joissakin tapauksissa säännöt ovat monimutkaisempia.

Jaollisuussääntöihin liittyy käsitteet *luku* ja *numero*, jotka tarkoittavat tässä oppikirjassa eri asioita. Numeroita ovat merkit $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ja 9. Luku muodostuu numeroista ja luvulla tarkoitetaan suuruutta tai määrää.

Jaollisuussäännöt perustuvat *laskujärjestelmässä*, joka yleensä on *kymmenjärjestelmä*, *paikkajärjestelmän* hyödyntämiseen. Kymmenjärjestelmässä luvun numeroiden paikat kertovat kymmenen potenssien lukumäärän.

Yleisesti voidaan esittää $(n + 1)$-numeroinen luku $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ summana

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Esimerkki A.20 Tarkastellaan lukua 52314. Se voidaan kirjoittaa muodossa

$$52314 = 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 4.$$

Tässä summassa luku 5 ilmaisee kymmenien tuhansien määrää, luku 2 tuhansien määrää, luku 3 satojen määrää, luku 1 kymmenten määrää ja luku 4 ykkösten määrää.

Yksinkertaisimpia jaollisuussääntöjä ovat jaollisuus kahdella, viidellä ja kymmenellä.

- Luku on jaollinen kahdella, jos sen viimeinen numero on parillinen.
- Luku on jaollinen viidellä, jos sen viimeinen numero on 0 tai 5.
- Luku on jaollinen kymmenellä, jos sen viimeinen numero on 0.

Jaollisuus luvulla 5 voidaan perustella paikkajärjestelmän avulla. Tiedetään, että $10 = 5 \cdot 2$, joten luku 10 on jaollinen luvulla 5. Siispä minkä tahansa luvun kymmenet ovat jaollisia luvulla 5. Koska $10^2 = 100 = 10 \cdot 10$ ja luku 10 on jaollinen luvulla 5, on myös luku 100 jaollinen luvulla 5. Sama pätee luvulle 1000, koska $10^3 = 1000 = 100 \cdot 10$ ja niin edelleen. Siispä tutkittaessa jaollisuutta luvulla 5, riittää tarkastella luvun ykkösiä, koska luvun kymmenet, sadat, tuhannet ym. ovat jaollisia luvulla 5. Ykkösissä ainoat viidellä jaolliset luvut ovat luvut 0 ja 5, joten viidellä jaollisen luvun viimeinen numero on oltava toinen näistä.

Samaan tapaan voidaan perustella myös jaollisuus luvulla 10. Tiedetään, että $10 = 10 \cdot 1$, $10^2 = 100 = 10 \cdot 10$, $10^3 = 1000 = 10 \cdot 100$ ja niin edelleen, joten luvun kymmenet, sadat, tuhannet ym. ovat jaollisia luvulla 10. Kymmenellä jaollisuutta tutkittaessa riittää tarkastella vain luvun ykkösiä ja koska ainoa kymmenellä jaollinen luku ykkösissä on luku 0, on kymmenellä jaollisen luvun viimeinen numero oltava luku 0.

Pohdinta A.21 Tutki seuraavia lukuja.

896, 1112, 275528, 115, 144, 3004, 1234, 457

Mitkä niistä ovat jaollisia neljällä?

Tutki neljällä jaollisten lukujen kahden viimeisen numeron muodostamaa lukua. Mitä huomaat? Päättele neljällä jaollisuuden sääntö ja perustele paikkajärjestelmän avulla, mihin sääntö perustuu.

Hieman monimutkaisempia jaollisuussääntöjä ovat esimerkiksi pohdintatehtävässä A.21 päätelty neljällä jaollisuus sekä jaollisuus kahdeksalla. Periaate näiden jaollisuussääntöjen taustalla on kuitenkin sama kuin aiemmissakin. Kolmella, kuudella, seitsemällä ja yhdeksällä jaollisuuksien säännöt ovat myös hieman haastavampia ja niihin liittyy erilaisia sääntöjä.

- Luku on jaollinen kuudella, jos se on jaollinen kahdella ja kolmella.

- Luku on jaollinen kahdeksalla, jos sen kolmesta viimeisestä numerosta muodostuva luku on jaollinen kahdeksalla

Mallitehtävä A.22 Onko luku 12240 jaollinen luvulla 8?

Luvun 12240 kolmen viimeisen numeron muodostama luku on 240, joka on jaollinen luvulla 8, koska

$240 : 8 = 30$

Jaollisuussääntöjen mukaan luku 12240 on siis jaollinen luvulla 8.

Luvun jaollisuus luvulla 8 perustuu samaan periaatteeseen kuin jaollisuus luvulla 4. Nyt täytyy kuitenkin tutkia luvun kolmea viimeistä numeroa, koska luvun tuhannet ovat jaollisia luvulla 8.

Pohdinta A.23 Tutki alla olevien lukujen numeroiden summia.

Ovatko numeroiden summat jaollisia luvuilla 3 tai 9?

Luokittele luvut kolmella ja yhdeksällä jaollisiin sekä niihin, jotka eivät ole jaollisia kummallakaan tai ovat jaollisia molemmilla.

2556, 6321, 11879, 23436, 28569, 39226, 59319, 89883, 99999, 137798

Mitä huomaat, kun vertaat jaottelemiasi luvulla 9 jaollisia lukuja sekä niitä lukuja, jotka ovat jaollisia molemmilla luvuilla 3 ja 9?

Onko seuraava väite oikein vai väärin: Jos luku on jaollinen luvulla 3, se on jaollinen aina myös luvulla 9.

Mitkä ovat säännöt lukujen 3 ja 9 jaollisuudelle?

Pohdinta A.24 Alla on tutkittu luvun jaollisuutta seitsemällä. Seuraavien päätelmien perusteella on tultu siihen tulokseen, että luvut 5999 ja 30247 ovat jaollisia seitsemällä, mutta luku 18582 ei ole. Päättele, mikä on seitsemällä jaollisuuden sääntö.

Vihje: Mieti mitä yhteistä kaikilla kertolaskuilla on.

Luku 5999:

$$\begin{aligned} 599 - 2 \cdot 9 &= 581 \\ 58 - 2 \cdot 1 &= 56 \end{aligned}$$

Luku 56 on jaollinen luvulla 7, koska $56 : 7 = 8$. Siten myös luku 5999 on jaollinen luvulla 7.

Luku 30247:

$$\begin{aligned} 3024 - 2 \cdot 7 &= 3010 \\ 301 - 2 \cdot 0 &= 301 \\ 30 - 2 \cdot 1 &= 28 \end{aligned}$$

Luku 28 on jaollinen luvulla 7, koska $28 : 7 = 4$. Siten myös luku 30247 on jaollinen luvulla 7.

Luku 18582:

$$
\begin{aligned}
1858 - 2 \cdot 2 &= 1854 \\
185 - 2 \cdot 4 &= 177 \\
17 - 2 \cdot 7 &= 3
\end{aligned}
$$

Luku 3 ei ole jaollinen luvulla 7, koska $3 : 7 = 0,428\ldots$, joka ei ole kokonaisluku. Siten myöskään luku 18582 ei ole jaollinen luvulla 7.

Pohdinta A.25 Pohdi seuraavia jaollisuuteen liittyviä kysymyksiä.

a) Onko luku 630 jaollinen luvuilla 7 ja 3.
   Onko luku jaollinen tulolla $3 \cdot 7 = 21$?
   Millaisia lukuja luvut 3 ja 7 ovat?

b) Onko luku 384 jaollinen luvuilla 3 ja 8?
   Onko luku jaollinen tulolla $3 \cdot 8 = 24$?
   Mikä on syt(3, 8)?

c) Onko luku 588 jaollinen luvuilla 2, 4 ja 8?
   Onko luku jaollinen tulolla $2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$?
   Mikä on syt(2, 4, 8)?

Mitä johtopäätöksiä jaollisuudesta voit tehdä edellä päättelemiesi vastausten perusteella?

Lause A.26 Jos luku a on jaollinen alkuluvuilla $p_1, p_2, \ldots, p_n$, jotka ovat eri suuria, niin a on jaollinen alkulukujen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tulolla.

Lause A.27 Luku a on jaollinen tulolla pq, jos a on jaollinen luvuilla p ja q, joiden suurin yhteinen tekijä on 1.

A.2.1 Harjoitustehtäviä

9. Joukon $\{1, 2, \ldots, 100\}$ luvuista kuinka moni on jaollinen

a) luvuilla 3 ja 7

b) luvulla 3 tai luvulla 7?

10. Tiedetään, että $500 \leq n \leq 600$ ja että $n \in \mathbb{Z}$ on jaollinen luvuilla 11 ja 13. Määritä kokonaisluku n.

11. Todista lause A.17. Vihje: Käytä väitteenä ja oletuksena seuraavia

Oletus: Tulo $a_1 a_2 \ldots a_n$ on jaollinen alkuluvulla p.

Väite: Ainakin yksi tulontekijöistä on jaollinen luvulla p.

12. Tutki ilman laskinta, mitkä luvuista 34530, 4855, 55672, 15876 ja 29610 ovat jaollisia luvulla

a) 4

b) 6

c) 7.

13. a) Onko luku 1345 jaollinen luvulla 15?

b) Onko luku 6828 jaollinen luvulla 12?

B Opettajan opas

B.1 Ajankäyttösuunnitelma

Oppikirja on tarkoitettu lukion pitkän matematiikan kurssille 11 *Lukuteoria ja todistaminen*. Tämä oppikirjan osio käsittelee aiheet *Alkuluvut* ja *Jaollisuuslauseita*. Tunnit ovat suunniteltu käytettäväksi niin, että alkulukujen käsittelyyn käytettäisiin kaksi 75 minuutin oppituntia ja jaollisuuslauseiden käsittelyyn yksi 75 minuutin oppitunti. Jos oppitunnit ovat pituudeltaan 45 minuuttia, on molempiin aiheisiin sopiva tuntimäärä kaksi 45 minuutin oppituntia.

B.2 Alkuluvut

Pohdinta A.1

Tehtävän tarkoituksena on tutustuttaa opiskelija alkulukuihin tutkimalla annettuja lukuja. Opiskelija saattaa jaotella luvut myös esimerkiksi parittomiin ja parillisiin lukuihin. Tarkoituksena kuitenkin olisi, että opiskelija osaisi jaotella luvut sen mukaan, ovatko ne alkulukuja vai yhdistettyjä lukuja. Alkulukuja ovat 2, 5, 11 ja 17. Yhdistettyjä lukuja ovat 9, 21, 24, 35. Alkulukujen ominaisuus on se, että ne ovat jaollisia vain itsellään ja luvulla 1.

Pohdinta A.4

Tehtävässä on etsittävä alkuluvut lukujoukosta. Löytämällä ensin alkuluvun 2 ja poistamalla sitten kaikki sen monikerrat, saa poistettua jo monta lukua. Seuraavaksi poistetaan alkuluvun 3 monikerrat ja näin jatketaan, kunnes jäljellä on vain alkuluvut. Koska tässä tehtävässä luvut olivat välillä 2-100, riittää tarkastella lukuun $\sqrt{100} = 10$ asti. Siten luvun 11 monikerrat eivät enää poista uusia lukuja.

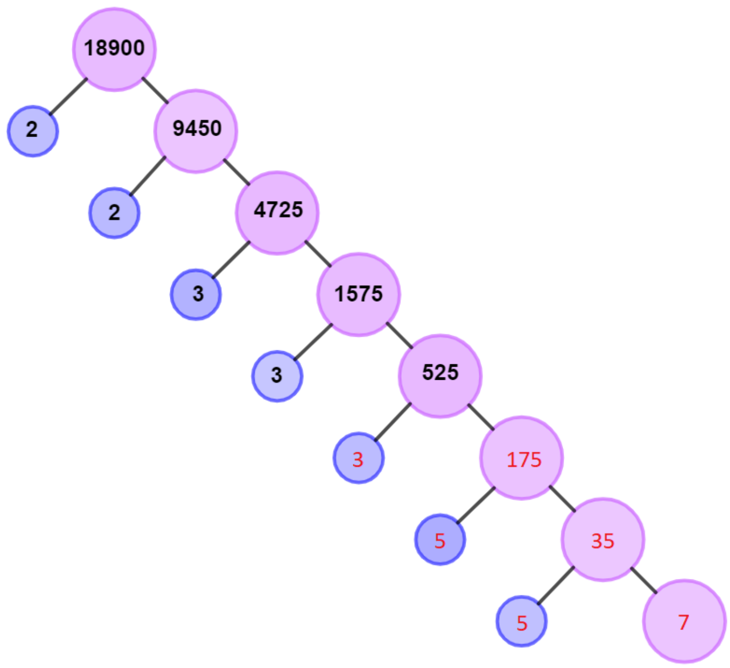
Pohdinta A.6

Kun tutkitaan lukua 479, jaetaan se lukua $\sqrt{479} = 21,886...$ pienemmillä alkuluvuilla. Tällaisia alkulukuja ovat 2, 3, 5, 7, 11 17 ja 19. Kun luku 479 jaetaan näillä luvuilla, huomataan että se ei ole jaollinen millään niistä. Tästä voidaan päätellä, että kyseessä on alkuluku.

Lukua 729 tutkittaessa se jaetaan lukua $\sqrt{729} = 27$ pienemmillä alkuluvuilla, joita ovat 2, 3, 5, 7, 11 17, 19 ja 23. Huomataan, että luku 729 on jaollinen luvulla 3. Tästä voidaan päätellä, että kyseessä ei ole alkuluku.

Pohdinta A.7

Alkutekijäpuussa jaetaan luku alkutekijöihin. Puun muodostuminen alkaa siitä, että jaetaan luku ensin alkuluvulla 2. Vastaukseksi saatu luku kirjoitetaan seuraavaan kohtaa ja jakajasta tulee puun oksa. Kun luku ei mene tasan jaettaessa luvulla 2, siirrytään jakamaan seuraavalla alkuluvulla. Näin jatketaan, kunnes puu on valmis. Puu on valmis sitten, kun viimeiseksi luvuksi alhaalle on saatu alkuluku. Siitä ei siis lähde enää oksaa, koska sitä ei voi enää jakaa.



Pohdinta A.9

Todistuksessa osoitetaan, että alkulukuhajotelma on olemassa. Todistus tehdään induktiolla ja alkuaskeleena käytetään lukua 2, jonka tiedetään olevan alkuluku. Siten sen alkulukuhajotelma on luku itse. Induktio-oletuksena on, että kaikki luvut $2, 3, \ldots n$ voidaan esittää kokonaislukujen tulona. Osoitetaan, että myös lukua n suuremmalla luvulla on olemassa alkulukuhajotelma. Valitaan luvuksi $n + 1$. Todistuksessa käsitellään kaksi tapausta, koska ei voida tietää, onko luku $n+1$ alkuluku vai ei. Jos luku $n+1$ on alkuluku, on selvää, että sen alkulukuhajotelma on luku itse, koska tämä oletettiin jo aikaisemmin. Jos luku $n + 1$ ei ole alkuluku, se voidaan esittää lukujen a ja b tulona ab.

Lukujen a ja b pitää olla suurempia tai yhtä suuria kuin luku 2, koska jos toinen luvuista olisi 1, luku ei välttämättä olisi alkuluku. Jos esimerkiksi $a = 1$ ja $b = 3$, niin silloin $ab = 1 \cdot 3 = 3$, joka on alkuluku.

Koska $n+1 = ab$ ja induktio-oletuksen mukaan luvut a ja b voidaan esittää alkulukujen tulona, niin silloin myös luku $n + 1$ voidaan esittää alkulukujen tulona.

Nyt on osoitettu, että luvulla on olemassa alkulukuhajotelma. Kaikki luvut voidaan siis esittää alkulukujen tulona.

Pohdinta A.12

Luvut on jaettu ensin alkutekijöihin. Suurin yhteinen tekijä saadaan, kun kerrotaan keskenään ne luvut, jotka ovat yhteisiä kaikissa hajotelmissa. Pienin yhteinen monikerta puolestaan saadaan, kun kerrotaan yhteen kaikki alkutekijät. Jokaista alkulukua valitaan kertolaskuun mukaan suurimman eksponentin ilmaisema määrä.

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

Siten $\text{syt}(84, 630, 1050) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ ja

$\text{pym}(84, 630, 1050) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6300$.

Pohdinta A.13

Tehtävän tarkoituksena on harjoitella pienimmän yhteisen monikerran laskemista alkulukuahjotelman avulla, jolloin tehtävässä muodostetaan ensin lukujen 6, 7 ja 8 alkulukuhajotelmat ja niiden avulla lasketaan $\text{pym}(6, 7, 8)$.

$6 = 2 \cdot 3$

$7 = 7$

$8 = 2^3$

$\text{pym}(6, 7, 8) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$

Koska opiskelijoista yksi ei osallistu ryhmiin, opiskelijoita on yhteensä

$\text{pym}(6, 7, 8) + 1 = 168 + 1 = 169$.

Tehtävän ratkaisuksi kelpaa myös $2 \cdot \text{pym}(6, 7, 8) + 1 = 2 \cdot 168 + 1 = 337$.

B.3 Jaollisuuslauseita

Pohdinta A.14

a) Koska kyseessä oleva luku 5 on alkuluku, on jommankumman tulontekijöistä välttämättä oltava jaollinen luvulla 5.

b) Koska luku 9 ei ole alkuluku, tulontekijöiden ei ole pakko olla jaollisia sillä. Koska luku 9 on jaollinen alkuluvulla 3, riittää että se on jaollinen sillä.

c) Erona on se, että toisessa tapauksessa on alkuluku ja toisessa ei.

Pohdinta A.16

Todistuksen oikea järjestys:

Todistus.

Oletus: Kokonaislukujen a ja b tulo ab on jaollinen luvulla p, joka on alkuluku.

Väite: Toinen luvuista a tai b on jaollinen alkuluvulla p.

Todistus: Väite on tosi, jos luku a on jaollinen luvulla p.

3. Osoitetaan, että luku b on välttämättä jaollinen luvulla p, jos oletetaan, että luku a ei ole jaollinen luvulla p.

4. Nyt $\mathrm{syt}(a, p) = 1$, koska luku p ei ole luvun a tekijä ja luvun p ainoat tekijät ovat luku 1 ja luku itse eli luku p. Tällöin voidaan Eukleideen algoritmilla osoittaa, että on olemassa sellaiset kokonaisluvut x ja y, että

$$px + ay = 1.$$

2. Tämän yhtälön molemmat puolet kerrotaan luvulla b.

$$\begin{aligned} px + ay &= 1 \\ pbx + aby &= b \end{aligned}$$

1. On olemassa kokonaisluku q siten, että $ab = pq$, koska tulo ab on jaollinen luvulla p. Sijoitetaan yhtälöön $ab = pq$.

$$\begin{aligned} pbx + aby &= b \\ pbx + pqy &= b \\ p(bx + qy) &= b \end{aligned}$$

5. Luvun $bx + qy$ ollessa kokonaisluku, on luku b siis jaollinen luvulla p.

6. Täten väite on tosi.

$\square$

Pohdinta A.18 ja A.19

Näissä tehtävissä luvut täytyy jakaa alkutekijöihin ja sen avulla perustella, ovatko ne yhtä suuria. Ensimmäisessä pohdintatehtävässä Aritmetiikan peruslauseen yksikäsitteisyyttä ei olla vielä käsitelty, joten opiskelija saattaa perustella tehtävän myös jollain muulla tavalla. Todennäköisesti opiskelija saattaa kuitenkin jo tässä vaiheessa hoksata, että luvut pitää jakaa alkutekijöihin. Toisessa pohdinnassa opiskelijan pitäisi tämä jo huomata, koska tehtävänanto siihen johdattelee.

a) $24 \cdot 45 = (4 \cdot 6) \cdot (9 \cdot 5) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$

   $18 \cdot 60 = (2 \cdot 9) \cdot (2 \cdot 30) = (2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 15) = (2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$

   Luvuilla on samat alkulukuhajotelmat, joten ne ovat yhtä suuret.

b) $168 \cdot 42 = (2 \cdot \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$

   $9 \cdot 392 = (3 \cdot \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$

   Lukujen alkulukuhajotelmat eivät ole samat, joten Aritmetiikan peruslauseen nojalla luvut eivät ole yhtä suuria.

Pohdinta A.21

Neljällä jaollisia lukuja ovat 896, 1112, 275528, 144 ja 3004.

Neljällä jaollisten lukujen kahden viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen neljällä. Neljällä jaollisuuden sääntö on siis se, että luku on jaollinen neljällä jos sen kahden viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen neljällä.

Pohdinta A.23

Luku on jaollinen luvulla 3, jos luvun numeroiden summa on jaollinen luvulla 3. Sama jaollisuussääntö koskee lukua 9. Jos luvun numeroiden summa on jaollinen luvulla 9, niin silloin myös luku on jaollinen sillä. Kolmella jaollisia lukuja ovat 28569, 6321, 23436. Yhdeksällä jaollisia lukuja ovat 2556, 59319, 89883, 99999. Yhdeksällä jaolliset luvut ovat myös kolmella jaollisia. Lukuja, jotka eivät ole jaollisia kummalaakaan, ovat 11879, 39226 ja 137798. Väite *Jos luku on jaollinen luvulla 3, se on jaollinen aina myös luvulla 9*, on väärin, ja tämän voi perustella tehtävästä saatavan vastaesimerkin avulla.

Pohdinta A.24

Luku on jaollinen seitsemällä, jos seuraavan laskutoimituksen jälkeen saatava luku on jaollinen seitsemällä: poistetaan luvun viimeinen numero ja kerrotaan kahdella, jonka jälkeen se vähennetään jäljellä olvista luvuista. Jaollisuutta tutkittaessa voidaan jatkaa niin pitkälle, kunnes selvästi nähdään, että luku on jaollinen seitsemällä. Tässä tehtävässä opiskelijan pohdintaa helpottaa annettu vihje, joka kehottaa kiinnittämään huomiota kertolaskuun. Opiskelijan on oleellista huomata se tieto, että poistettu luku kerrotaan aina luvulla 2.

Pohdinta A.25

Tehtävän tarkoituksena on päätyä niihin johtopäätöksiin, jotka tulevat esille oppikirjassa seuraavaksi esitettävissä jaollisuuslauseissa.

a) Luku 630 on jaollinen luvuilla 3, 7 ja 21. Luvut 3 ja 7 ovat alkulukuja, joten niille pätee lause A.26.

b) Luku 384 on jaollinen luvuilla 3, 8 ja 24. Nyt pätee lause A.27, koska $\text{syt}(3, 8) = 1$.

c) Luku 588 on jaollinen luvuilla 2 ja 4, mutta ei luvulla 8. Koska $\text{syt}(2, 4, 8) \neq 1$ huomataan, että jaollisuussääntö ei toimi, jos suurin yhteinen tekijä ei ole luku 1.

C Tehtävien vastaukset

1. a) on b) ei ole c) ei ole

2. 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199

3. Kahdeksas alkuluku on 19, joten lukua $19^2 = 361$ pienemmät alkuluvut.

4. a) $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$
   b) $2^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$
   c) $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$

5. Etsi vastaesimerkki.

6. $(2 \cdot 3)^{10} = 6^{10} = (6^5)^2 = 7776^2$ Vihje: Hyödynnä potenssin laskusääntöjä.

7. a) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 19$
   b) $5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 89$
   c) 103811

8. a) $\text{syt}(120, 325) = 5$
   $\text{pym}(120, 325)$
   b) $\text{syt}(7, 49, 77) = 7$
   $\text{pym}(56, 49, 77) = 539$
   c) $\text{syt}(56, 79, 123) = 1$
   $\text{pym}(56, 79, 123) = 544152$

9. a) 4 kpl
   b) 43 kpl Vihje: Kun olet ensin määrittänyt luvut, jotka ovat jaollisia luvulla 3 ja luvulla 7, huomioi sen jälkeen luvut jotka ovat jaollisia molemmilla luvuilla 3 ja 7.

10. $n = 572$

11. Todista induktiolla. Käytä alkuaskeleena $n = 1$. Induktioaskeleessa sovella Eukleideen lemmaa tuloon $(a_1, a_2 \ldots a_n) \cdot a_{n+1}$.

12. a) 55672, 15876
    b) 34530, 15876, 29610
    c) 15876, 29610

13. a) ei ole b) on